2020 年早稲田大学スポーツ科学部問題 *1*

$0 \leqq a \leqq b \leqq c$ かつ $a+b+c=7$ を満たすとき ca の最大値を求めてください。

解説・解答

$a+a+a \leqq a+b+c=7$ より $0 \leqq a \leqq \dfrac{7}{3}$ です。

$0+b+b \leqq a+b+c=7$ より $0 \leqq b \leqq \dfrac{7}{2}$ です。

$0+0+c \leqq a+b+c \leqq c+c+c$ より $\dfrac{7}{3} \leqq c \leqq 7$ です。

$f(a)=ca=(7-a-b)a=-a^2+(7-b)a=-\Big(a-\dfrac{7-b}{2}\Big)^2+\Big(\dfrac{7-b}{2}\Big)^2$ と置きます。
範囲 $a<\dfrac{7-b}{2}$ で $f(a)$ は増加です。

$a+b+c=7$ より $c=7-a-b$ なので $0 \leqq a \leqq b \leqq 7-a-b$ です。
$b \leqq 7-a-b$ より $a \leqq 7-2b$ なので、 b と $7-2b$ の大小関係を考慮します。

$0 \leqq b \leqq \dfrac{7}{3}$ のとき $0 \leqq a \leqq b \leqq \dfrac{7-b}{2}$ なので $f(a) \leqq f(b)=-2b^2+7b$ です。

$\dfrac{7}{3} \leqq b \leqq \dfrac{7}{2}$ のとき $0 \leqq a \leqq 7-2b \leqq \dfrac{7-b}{2}$ なので $f(a) \leqq f(7-2b)=-2b^2+7b$ です。

ゆえに $ca \leqq -2b^2+7b=-2\Big(b-\dfrac{7}{4}\Big)^2+\dfrac{49}{8} \leqq \dfrac{49}{8}$ $\quad \Big(b=\dfrac{7}{4}$ で等号成立$\Big)$

以上より $\big(a,b,c\big)=\Big(\dfrac{7}{4},\dfrac{7}{4},\dfrac{7}{2}\Big)$ のときに最大値 $ca=\dfrac{49}{8}$ です。