2020 年早稲田大学理工部問題 *1*

n は自然数、α, β, γ は $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ かつ $\alpha + \beta + \gamma = 0$ を満たす複素数です。
$|\alpha^n + \beta^n + \gamma^n|$ の値を求めてください。

解説・解答

複素数平面上で $0, \alpha, \beta, \gamma$ に対応する点をそれぞれ O, A, B, C と置きます。
$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ より A, B, C は半径 1, 中心点 O の円周上にあるので、
O は三角形 ABC の外接円の中心です。
$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 0$ より O は三角形 ABC の重心です。
外接円の中心と重心が一致しているので、三角形 ABC は正三角形です。
よって $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \dfrac{2\pi}{3}$ です。
$\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $\omega^3 = 1$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を用いて
$\beta = \omega\alpha$, $\gamma = \omega^2\alpha$ と表せます。
$|\alpha^n + \beta^n + \gamma^n| = |\alpha^n + \omega^n\alpha^n + \omega^{2n}\alpha^n| = |1 + \omega^n + \omega^{2n}| \cdot |\alpha|^n = |1 + \omega^n + \omega^{2n}|$

$n = 3k\,(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき $1 + \omega^n + \omega^{2n} = 1 + \omega^{3k} + \omega^{6k} = 1 + 1 + 1 = 3$
$n = 3k+1\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ のとき $1 + \omega^n + \omega^{2n} = 1 + \omega^{3k+1} + \omega^{6k+2} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$
$n = 3k+2\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ のとき $1 + \omega^n + \omega^{2n} = 1 + \omega^{3k+2} + \omega^{6k+4} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$

以上より n が 3 の倍数のとき $|\alpha^n + \beta^n + \gamma^n| = 3$,
n が 3 の倍数でないとき $|\alpha^n + \beta^n + \gamma^n| = 0$ です。