2020 年東京工業大学問題 *1*

k 個の連続した正整数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ に対して
$\left|{x_j}^2 - x_j - 23\right|$ $(1 \leqq j \leqq k)$ の値がすべて素数になる k の最大値を求めてください。

解説・解答

$a_n = \left|n^{\ 2} - n - 23\right| = \left|(n-5)(n+4) - 3\right|$ と置きます。
$a_1 = |-23| = 23$ (素数),
$a_2 = |-21| = 21$ (合成数)
$a_3 = |-17| = 17$ (素数)
$a_4 = |-11| = 11$ (素数)
$a_5 = |\ \ -3| = \ \ 3$ (素数)
$a_6 = |\ \ \ \ \ 7| = \ \ 7$ (素数)
$a_7 = |\ \ \ 19| = 19$ (素数)
$a_8 = |\ \ \ 33| = 33$ (合成数)
a_3 から a_7 まで素数が 5 個連続します。

$3m+2 \geqq 8$ (m は 2 以上の整数) のとき
$a_{3m+2} = \left|\{(3m+2)-5\}\{(3m+2)+4\} - 3\right|$
$\qquad = 3\,\{3(m-1)(m+2)-1\} \geqq 33$
3 より大きい 3 の倍数なので a_{3m+2} は合成数です。
よって a_n は $n > 8$ で素数が 3 個連続することはありません。

以上より k の最大値は 5 です。