2020 年千葉大学問題 5

四面体 $OABC$ において
$\angle AOB = 90^\circ$, $AB^2 + OC^2 = BC^2 + OA^2 = CA^2 + OB^2$ が成り立っています。
三角形 ABC の重心を G として $\dfrac{\sqrt{AB^2 + OC^2}}{OG}$ の値を求めてください。

解説・解答

三角形 OAB で $\angle AOB = 90^\circ$ なので $AB^2 = OA^2 + OB^2$ です。

$AB^2 + OC^2 = BC^2 + OA^2$ より
$BC^2 = AB^2 + OC^2 - OA^2 = (OA^2 + OB^2) + OC^2 - OA^2 = OB^2 + OC^2$ なので
三角形 OBC で $\angle BOC = 90^\circ$ です。

$AB^2 + OC^2 = CA^2 + OB^2$ より
$CA^2 = AB^2 + OC^2 - OB^2 = (OA^2 + OB^2) + OC^2 - OB^2 = OC^2 + OA^2$ なので
三角形 OCA で $\angle COA = 90^\circ$ です。

以上より、直交座標で $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ と置けます。
G は三角形 ABC の重心なので $G\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$ です。

よって $\dfrac{\sqrt{AB^2 + OC^2}}{OG} = \dfrac{\sqrt{(a^2 + b^2) + c^2}}{\sqrt{(\frac{a}{3})^2 + (\frac{b}{3})^2 + (\frac{c}{3})^2}} = 3$ です。