

2020年静岡大学教育学部問題2

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は平面ベクトル、 k は整数、 m, n は $m > n \geq 3$ の整数です。

次の条件を満たす (k, m, n) を求めてください。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k, \quad \vec{c} = 2m\vec{a} + 2\vec{b}, \quad |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = n, \quad |\vec{c}| = mn$$

解説・解答

$$mn = |\vec{c}| = |2m\vec{a} + 2\vec{b}| \leq |2m\vec{a}| + |2\vec{b}| = 2m + 2n$$

$(m-2)(n-2) \leq 4$ に式変形できるので $(m, n) = (4, 3), (5, 3), (6, 3)$ です。

$$m^2n^2 = |\vec{c}|^2 = |2m\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 4m^2|\vec{a}|^2 + 8m\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4m^2 + 8km + 4n^2$$

よって $k = \frac{m^2n^2 - 4m^2 - 4n^2}{8m}$ です。

$$(m, n) = (4, 3), (5, 3), (6, 3) \text{ のときそれぞれ } k = \frac{11}{8}, \frac{89}{40}, 3 \text{ です。}$$

以上より $(k, m, n) = (3, 6, 3)$ です。