

2020年札幌医科大学問題 1

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定めます。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$0 < a_n < 1$ のとき $1 < 2 - a_n < 2$ なので $0 < a_{n+1} < 1$ です。

数学的帰納法により全ての自然数 n で $0 < a_n < 1$ なので $a_n \neq 0$ です。

漸化式の両辺を逆数にすると $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} - 1$ です。

$\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = 2 \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$ に式変形できるので $\frac{1}{a_n} - 1 = 2^{n-1} \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) = 2^n$ です。

よって $a_n = \frac{1}{2^n + 1}$ です。