

2020 年札幌医科大学問題 2

n を自然数として $f_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos \theta + \sin 2n\theta)^2 d\theta$ とします。
 $f_n(x)$ の最小値を a_n とします。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos \theta + \sin 2n\theta)^2 d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cos^2 \theta + 2x \cos \theta \sin 2n\theta + \sin^2 2n\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} x^2 + \{ \sin(2n+1)\theta + \sin(2n-1)\theta \} x + \frac{1 - \cos 4n\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \left[\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) x^2 - \left\{ \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)\theta}{2n-1} \right\} x + \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4n\theta}{8n} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{4n}{(2n+1)(2n-1)} x + \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(x + \frac{4n}{(2n+1)(2n-1)\pi} \right)^2 - \frac{16n^2}{(2n+1)^2(2n-1)^2\pi} + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

以上より $a_n = f_n \left(\frac{-4n}{(2n+1)(2n-1)\pi} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{16n^2}{(2n+1)^2(2n-1)^2\pi}$ です。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\frac{16}{n^2}}{(2 + \frac{1}{n})^2(2 - \frac{1}{n})^2\pi} \right) = \frac{\pi}{4} \text{ です。}$$