2020 年大阪市立大学後期理学部問題 5

a, b, c, x, y, z は $a^2 > b^2 + c^2$ を満たす実数です。
$(ax - by - cz)^2 \geqq (a^2 - b^2 - c^2)(x^2 - y^2 - z^2)$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (at+x)^2-(bt+y)^2-(ct+z)^2 \\
&= (a^2-b^2-c^2)t^2+2(ax-by-cz)t+(x^2-y^2-z^2)
\end{aligned}
$$
と置きます。

t^2 の係数が $a^2-b^2-c^2>0$ で

$f\left(-\dfrac{x}{a}\right)=-\left(-\dfrac{bx}{a}+y\right)^2-\left(-\dfrac{cx}{a}+z\right)^2 \leqq 0$ なので

t についての二次方程式 $f(t)=0$ は実数解を持ちます。

よって、判別式 $\dfrac{D}{4}=(ax-by-cz)^2-(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2) \geqq 0$ です。

以上より $(ax-by-cz)^2 \geqq (a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$ です。