2020 年大阪市立大学後期理学部問題 4

p, q は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす正の実数です。
0 以上の実数 s, t に対して $\dfrac{s^p}{p} + \dfrac{t^q}{q} \geqq st$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

$\dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ なので $p > 1$ です。

座標平面上で $(0,0),(s,0),(s,t),(0,t)$ を頂点とする長方形の面積は st です。

第一象限で x 軸と直線 $x = s$ と曲線 $y = x^{p-1}$ で囲まれた図形の面積は
$\displaystyle\int_0^s ydx = \int_0^s x^{p-1}dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^s = \frac{s^p}{p}$ です。

第一象限で y 軸と直線 $y = t$ と曲線 $y = x^{p-1}$ で囲まれた図形の面積は
$\displaystyle\int_0^t x\,dy = \int_0^t y^{\frac{1}{p-1}}\,dy = \left[\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right]_0^t = \frac{t^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}} = \frac{t^q}{q}$ です。

$t^{\frac{1}{p-1}} \leqq s \ (t \leqq s^{p-1})$ のとき、
面積を考えると $\displaystyle\frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} = \int_0^s ydx + \int_0^t x\,dy = st + \int_{t^{\frac{1}{p-1}}}^s (x^{p-1} - t)dx \geqq st$ です。

$t^{\frac{1}{p-1}} \geqq s \ (t \geqq s^{p-1})$ のとき、
面積を考えると $\displaystyle\frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} = \int_0^s ydx + \int_0^t x\,dy = st + \int_{s^{p-1}}^t (y^{\frac{1}{p-1}} - s)dy \geqq st$ です。

以上より $\dfrac{s^p}{p} + \dfrac{t^q}{q} \geqq st$ です。