2020 年大阪大学理系問題 3

n は 2 以上の整数です。
三角形 ABC の辺 AB, BC, CA の長さをそれぞれ c, a, b とします。
$\angle BCA = n\angle ABC$ のとき $c < nb$ であることを示してください。

解説・解答

$\angle ABC = \theta$ と置きます。
正弦定理より $\dfrac{b}{\sin\theta} = \dfrac{c}{\sin n\theta} = 2R$ (R は外接円の半径) です。
よって $b = 2R\sin\theta,\ c = 2R\sin n\theta$ です。

三角形の内角の和は π なので $\angle ABC + \angle BCA = (n+1)\theta < \pi$ です。
よって $0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ です。
$0 < x < \pi$ で $\cos x$ は単調減少なので $\cos\theta > \cos n\theta$ です。

範囲 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ で $f(\theta) = nb - c = 2R(n\sin\theta - \sin n\theta)$ と置き、
微分すると $f'(\theta) = 2nR(\cos\theta - \cos n\theta) > 0$ なので $f(\theta)$ は単調増加です。
よって $nb - c = f(\theta) > f(0) = 0$ です。

以上より $c < nb$ です。