2020 年大阪大学文系問題 2

円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C と置きます。
点 P は A から出発し、サイコロを投げ、
1 の目が出た場合は時計回りに隣の点へ移動し、
2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点へ移動し、
その他の目が出た場合は移動しません。
サイコロを n 回投げた後、点 P が A に位置する確率を求めてください。

解説・解答

サイコロを n 回投げた後、点 P が A, B, C に位置する確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とします。
点 P は A から出発するので $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$ です。
点 P は A, B, C のいずれかにいるので $a_n + b_n + c_n = 1$ です。

A にいて $3, 4, 5, 6$ が出る、B にいて 2 が出る、C にいて 1 が出ると A に位置します。
よって $a_{n+1} = \dfrac{4}{6}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{1}{6}c_n = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{6}(a_n + b_n + c_n) = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{6}$ です。

$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$ に式変形できるので $a_n - \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \dfrac{1}{3}\right)$ です。

よって $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ です。

以上より、求める確率は $\dfrac{1}{3}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ です。