

2020年岡山大学文系問題 2

$a, b, c$  を  $a \neq 0$  の整数として  $f(x) = ax^2 + bx + c$  とします。  
 $|x| \leq 1$  を満たす全ての実数で  $|f(x)| \leq 1$  となる  $f(x)$  を求めてください。

## 解説・解答

$f(1) = a + b + c$ ,  $f(0) = c$ ,  $f(-1) = a - b + c$   
 $|f(x)| \leq 1$  より  $|f(1)| \leq 1$ ,  $|f(0)| \leq 1$ ,  $|f(-1)| \leq 1$  です。

$|c| = |f(0)| \leq 1$  より  $c = 0, \pm 1$  です。

$|b| = \left| \frac{f(1) - f(-1)}{2} \right| \leq \frac{|f(1)| + |f(-1)|}{2} \leq 1$  より  $b = 0, \pm 1$  です。

$|a| = \left| \frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2} \right| \leq \frac{|f(1)| + 2|f(0)| + |f(-1)|}{2} \leq 2$  より  $a = \pm 1, \pm 2$  です。

$(a, b) = (2, 1)$  のとき  $f(x) = 2x^2 + x + c$ ,  $f(1) = 3 + c \geq 2$  なので不適です。

$(a, b, c) = (2, 0, 1)$  のとき  $f(x) = 2x^2 + 1$ ,  $f(1) = 3$  なので不適です。

$(a, b, c) = (2, 0, 0)$  のとき  $f(x) = 2x^2$ ,  $f(1) = 2$  なので不適です。

$(a, b, c) = (2, 0, -1)$  のとき  $f(x) = 2x^2 - 1$ ,  $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$  なので条件を満たします。

$(a, b) = (2, -1)$  のとき  $f(x) = 2x^2 - x + c$ ,  $f(-1) = 3 + c \geq 2$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 1, 1)$  のとき  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $f(1) = 3$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 1, 0)$  のとき  $f(x) = x^2 + x$ ,  $f(1) = 2$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 1, -1)$  のとき  $f(x) = x^2 + x - 1$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 0, 1)$  のとき  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $f(1) = 2$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 0, 0)$  のとき  $f(x) = x^2$ ,  $0 \leq x^2 \leq 1$  なので条件を満たします。

$(a, b, c) = (1, 0, -1)$  のとき  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $-1 \leq x^2 - 1 \leq 0$  なので条件を満たします。

$(a, b, c) = (1, -1, 1)$  のとき  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $f(-1) = 3$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, -1, 0)$  のとき  $f(x) = x^2 - x$ ,  $f(-1) = 2$  なので不適です。

$(a, b, c) = (1, -1, -1)$  のとき  $f(x) = x^2 - x - 1$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$  なので不適です。

$|f(x)| = |-f(x)|$  なので  $a = -1, -2$  のときは  $a = 1, 2$  の  $f(x)$  に  $-1$  を掛ければ良いです。

以上より  $f(x) = \pm x^2, \pm(x^2 - 1), \pm(2x^2 - 1)$  です。