

2020年岡山大学文系問題2

a, b, c を $a \neq 0$ の整数として $f(x) = ax^2 + bx + c$ とします。
 $|x| \leqq 1$ を満たす全ての実数で $|f(x)| \leqq 1$ となる $f(x)$ を求めてください。

解説・解答

$f(1) = a + b + c$, $f(0) = c$, $f(-1) = a - b + c$
 $|f(x)| \leq 1$ より $|f(1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, $|f(-1)| \leq 1$ です。

$$|c| = |f(0)| \leq 1 \text{ より } c = 0, \pm 1 \text{ です。}$$

$$|b| = \left| \frac{f(1) - f(-1)}{2} \right| \leq \frac{|f(1)| + |f(-1)|}{2} \leq 1 \text{ より } b = 0, \pm 1 \text{ です。}$$

$$|a| = \left| \frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2} \right| \leq \frac{|f(1)| + 2|f(0)| + |f(-1)|}{2} \leq 2 \text{ より } a = \pm 1, \pm 2 \text{ です。}$$

$(a, b) = (2, 1)$ のとき $f(x) = 2x^2 + x + c$, $f(1) = 3 + c \geq 2$ なので不適です。

$(a, b, c) = (2, 0, 1)$ のとき $f(x) = 2x^2 + 1$, $f(1) = 3$ なので不適です。

$(a, b, c) = (2, 0, 0)$ のとき $f(x) = 2x^2$, $f(1) = 2$ なので不適です。

$(a, b, c) = (2, 0, -1)$ のとき $f(x) = 2x^2 - 1$, $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$ なので条件を満たします。

$(a, b) = (2, -1)$ のとき $f(x) = 2x^2 - x + c$, $f(-1) = 3 + c \geq 2$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 1, 1)$ のとき $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(1) = 3$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 1, 0)$ のとき $f(x) = x^2 + x$, $f(1) = 2$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 1, -1)$ のとき $f(x) = x^2 + x - 1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 0, 1)$ のとき $f(x) = x^2 + 1$, $f(1) = 2$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, 0, 0)$ のとき $f(x) = x^2$, $0 \leq x^2 \leq 1$ なので条件を満たします。

$(a, b, c) = (1, 0, -1)$ のとき $f(x) = x^2 - 1$, $-1 \leq x^2 - 1 \leq 0$ なので条件を満たします。

$(a, b, c) = (1, -1, 1)$ のとき $f(x) = x^2 - x + 1$, $f(-1) = 3$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, -1, 0)$ のとき $f(x) = x^2 - x$, $f(-1) = 2$ なので不適です。

$(a, b, c) = (1, -1, -1)$ のとき $f(x) = x^2 - x - 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ なので不適です。

$|f(x)| = |-f(x)|$ なので $a = -1, -2$ のときは $a = 1, 2$ の $f(x)$ に -1 を掛ければ良いです。

以上より $f(x) = \pm x^2, \pm(x^2 - 1), \pm(2x^2 - 1)$ です。