*2020* 年岡山大学文系問題 *1*

$1, 2, 3, 4$ から無作為に数を選ぶ試行を繰り返し、$n$ 回目で選んだ数を $r_n$ とします。
数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = r_n a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
$a_n = 24$ となる確率を求めてください。

解説・解答

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$

$a_1, a_2, a_3$ は 24 にならないので $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ です。

$a_4 = 24$ となるのは $2, 3, 4$ が選ばれたときなので
$p_4 = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{3}{32}$ です。

$a_5 = 24$ となるのは $1, 2, 3, 4$ が選ばれたとき、または、2 が 3 個と 3 が選ばれたときなので
$p_5 = \left(\dfrac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} + \dfrac{4!}{3!\,1!}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{7}{64}$ です。

$a_n = 24\ (n \geq 6)$ となるのは 1 が $n-4$ 個, $2, 3, 4$ が選ばれたとき、
または、1 が $n-5$ 個, 2 が 3 個, 3 が選ばれたときなので
$p_n = \left(\dfrac{(n-1)!}{(n-4)!\,1!\,1!\,1!} + \dfrac{(n-1)!}{(n-5)!\,3!\,1!}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)}{6 \cdot 4^{n-1}}$ です。
この式は $n = 1, 2, 3, 4, 5$ でも成立しています。

以上より $p_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n+2)}{6 \cdot 4^{n-1}}$ です。