

2020年岡山大学理系問題 3

xyz 空間で $O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1), E(1, 0, 1), F(1, 1, 1), G(0, 1, 1)$ を考えます。点 P は時刻 $t = 0$ に原点 O を出発し毎秒 1 の速さで正方形 $OABC$ の周上を O, A, B, C の順に一周します。点 Q は時刻 $t = 0$ に点 D を出発し毎秒 1 の速さで正方形 $DEFG$ の周上を D, E, F, G の順に一周します。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 $OABC$, 正方形 $DEFG$ によって囲まれる立体の体積を求めてください。

解説・解答

$0 \leq t \leq 1$ のとき $P(t, 0, 0), Q(0, t, 1)$ です。

$1 \leq t \leq 2$ のとき $P(1, t-1, 0), Q(t-1, 1, 1)$ です。

$2 \leq t \leq 3$ のとき $P(3-t, 1, 0), Q(1, 3-t, 1)$ です。

$3 \leq t \leq 4$ のとき $P(0, 4-t, 0), Q(4-t, 0, 1)$ です。

線分 PQ 上の点を R と置きます。

$0 \leq s \leq 1$ とし $\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ}$ と表せます。

R は $t = 0, 1, 2, 3$ でそれぞれ $R_0(0, 0, s), R_1(1-s, s, s), R_2(1, 1, s), R_3(s, 1-s, s)$ です。

$$\overrightarrow{R_0R_1} = (1-s, s, 0) = \overrightarrow{R_3R_2}, \quad \overrightarrow{R_0R_2} \cdot \overrightarrow{R_1R_3} = (1, 1, 0) \cdot (2s-1, 1-2s, 0) = 0$$

よって、平面 $z = s$ 上では菱形 $R_0R_1R_2R_3$ を描きます。

$$R_0R_2 = \sqrt{2}, R_1R_3 = \sqrt{2}|1-2s| \text{ なので菱形の面積は } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|1-2s|}{2} = |1-2s| \text{ です。}$$

$$\text{立体の体積は } \int_0^1 |1-2s| ds = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2s) ds = \frac{1}{2} \text{ です。}$$