

2020 年岡山大学理系問題 3

$xyz$ 空間で  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $D(0, 0, 1)$ ,  $E(1, 0, 1)$ ,  $F(1, 1, 1)$ ,  $G(0, 1, 1)$  を考えます。点  $P$  は時刻  $t = 0$  に原点  $O$  を出発し毎秒 1 の速さで正方形  $OABC$  の周上を  $O, A, B, C$  の順に一周します。点  $Q$  は時刻  $t = 0$  に点  $D$  を出発し毎秒 1 の速さで正方形  $DEFG$  の周上を  $D, E, F, G$  の順に一周します。線分  $PQ$  が通過してできる図形と正方形  $OABC$ , 正方形  $DEFG$  によって囲まれる立体の体積を求めてください。

## 解説・解答

$0 \leq t \leq 1$  のとき  $P(t, 0, 0), Q(0, t, 1)$  です。

$1 \leq t \leq 2$  のとき  $P(1, t-1, 0), Q(t-1, 1, 1)$  です。

$2 \leq t \leq 3$  のとき  $P(3-t, 1, 0), Q(1, 3-t, 1)$  です。

$3 \leq t \leq 4$  のとき  $P(0, 4-t, 0), Q(4-t, 0, 1)$  です。

線分  $PQ$  上の点を  $R$  と置きます。

$0 \leq s \leq 1$  とし  $\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ}$  と表せます。

$R$  は  $t = 0, 1, 2, 3$  でそれぞれ  $R_0(0, 0, s), R_1(1-s, s, s), R_2(1, 1, s), R_3(s, 1-s, s)$  です。

$\overrightarrow{R_0R_1} = (1-s, s, 0) = \overrightarrow{R_3R_2}$ ,  $\overrightarrow{R_0R_2} \cdot \overrightarrow{R_1R_3} = (1, 1, 0) \cdot (2s-1, 1-2s, 0) = 0$

よって、平面  $z = s$  上では菱形  $R_0R_1R_2R_3$  を描きます。

$R_0R_2 = \sqrt{2}$ ,  $R_1R_3 = \sqrt{2}|1-2s|$  なので菱形の面積は  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|1-2s|}{2} = |1-2s|$  です。

立体の体積は  $\int_0^1 |1-2s| ds = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2s) ds = \frac{1}{2}$  です。