2020 年新潟大学文系問題 1

各位の数が $1, 2, 3$ のいずれかである n 桁の整数で、
各位の数の合計が 4 の倍数となるものの個数を求めてください。

解説・解答

n 桁の各位の数の合計を 4 で割った余りが $0, 1, 2, 3$ となるものの個数を
それぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とします。

各位の数が $1, 2, 3$ のいずれかなので $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (0, 1, 1, 1)$ です。
各位の数が $1, 2, 3$ のいずれかである n 桁の整数の総数は $a_n + b_n + c_n + d_n = 3^n$ です。

n 桁の各位の数の合計を 4 で割った余りが $1, 2, 3$ の整数にそれぞれ $3, 2, 1$ の数字を一桁付け加えれば、各位の数の合計が 4 の倍数となる $n+1$ 桁の整数になります。
よって $a_{n+1} = b_n + c_n + d_n = (a_n + b_n + c_n + d_n) - a_n = 3^n - a_n$ です。

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n}{3^n} - \dfrac{1}{4}\right)$ に式変形できるので $\dfrac{a_n}{3^n} - \dfrac{1}{4} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{a_1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$

ゆえに $a_n = 3^n\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{0}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4}\right\} = \dfrac{3 \cdot (-1)^n + 3^n}{4}$ です。

以上より、各位の数の合計が 4 の倍数となるものは $\dfrac{3 \cdot (-1)^n + 3^n}{4}$ 個です。