2020 年京都大学理系問題 *2*

m は 30 以下の正整数、n は 3 で割り切れない 30 以下の正整数です。
正整数 a を $a = 3^b c\,(b, c$ は整数で c は 3 で割り切れない$)$ と表したとき $f(a) = b$ とします。
$f(m^3 + n^2 + n + 3)$ の最大値とそのときの m, n を求めてください。

解説・解答

$m=3s+t$ (s は 0 以上 10 以下の整数, $t=0,1,2$) と置きます。

$n=3u-1$ (u は 1 以上 10 以下の整数) のとき
$$\begin{aligned} m^3+n^2+n+3 &= (3s+t)^3+(3u-1)^2+(3u-1)+3 \\ &= 3^3(s^3+s^2t)+3^2(st^2+u^2)+3(-u+1)+t^3 \end{aligned}$$
$t=0$ の場合 $m^3+n^2+n+3=3^3s^3+3^2u^2+3(-u+1)$ は 3 の倍数です。
さらに $-u+1$ が 3 の倍数 ($u=1,4,7,10$) なら m^3+n^2+n+3 は 3^2 の倍数です。
$\bigl(u,\,3^2u^2+3(-u+1)\bigr)=(1,\,3^2),(4,\,3^3\cdot5),(7,\,3^2\cdot47),(10,\,3^2\cdot97)$ なので
$u=4$ なら $m^3+n^2+n+3=3^3(s^3+5)$ は 3^3 の倍数です。
さらに s が 3 で割った余り 1 ($s=1,4,7,10$) なら m^3+n^2+n+3 は 3^4 の倍数です。
$(s,s^3+5)=(1,\,3\cdot2),(4,\,3\cdot23),(7,\,3\cdot2^2\cdot29),(10,\,3\cdot5\cdot67)$ なので
m^3+n^2+n+3 は 3^5 の倍数には成りません。

$n=3u+1$ (u は 0 以上 9 以下の整数) のとき
$$\begin{aligned} m^3+n^2+n+3 &= (3s+t)^3+(3u+1)^2+(3u+1)+3 \\ &= 3^3(s^3+s^2t)+3^2(st^2+u^2+u)+t^3+5 \end{aligned}$$
$(t,\,t^3+5)=(0,\,5),(1,\,3\cdot2),(2,\,13)$ なので
m^3+n^2+n+3 は 3^2 の倍数には成りません。

以上より $m=3,12,21,30,\ n=11$ のときに最大値 $f(m^3+n^2+n+3)=4$ です。