2020 年京都大学理系問題 2

n,p は正の整数です。
α,β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で $|\alpha|>1$ とします。
極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めてください。

解説・解答

判別式 $D/4 = p^2 + 1 > 0$ なので α, β は実数です。
解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2p,\ \alpha\beta = -1$ です。

$\alpha + \beta = 2p$ は偶数です。
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (2p)^2 - 2 \cdot (-1) = 4p^2 + 2$ も偶数です。
$\alpha^k + \beta^k,\ \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ が偶数だと仮定すると
$\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) = 2p \cdot (\text{偶数}) + (\text{偶数})$
よって $\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}$ も偶数です。
数学的帰納法により全ての正の整数 n で $\alpha^n + \beta^n$ は偶数です。

$\sin(\alpha^n \pi) = \sin\{(\alpha^n + \beta^n)\pi - \beta^n \pi\} = -\sin(\beta^n \pi)$

$|\alpha| > 1$ より $|\beta| = \left|\dfrac{\alpha\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{-1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|} < 1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \beta^n = 0$ です。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi) &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \alpha^n \sin(\beta^n \pi) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} (\alpha\beta)^n \pi \cdot \frac{\sin(\beta^n \pi)}{\beta^n \pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} \pi \cdot \frac{\sin(\beta^n \pi)}{\beta^n \pi} \\
&= -\pi
\end{aligned}
$$