2020 年京都大学理系問題 *1*

a, b は $a > 0$ を満たす実数です。
z に関する方程式 $z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0$ は 3 つの異なる解を持ち、
それらは複素数平面上で一辺 $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点です。
a, b の値を求めてください。

解説・解答

方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0$ の解を $\alpha, \beta, \overline{\beta}$ (αは実数, βは複素数) と置きます。
方程式の定数項が 1 なので $\alpha \neq 0$ です。

$\alpha, \beta, \overline{\beta}$ は複素数平面上で一辺 $\sqrt{3}\,a$ の正三角形の頂点なので $|\alpha-\beta| = |\beta-\overline{\beta}| = \sqrt{3}\,a$
よって $\beta = \alpha \pm \dfrac{3a}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}i$ と置けます。

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\overline{\beta} = -3a, \quad \alpha(\beta+\overline{\beta})+\beta\overline{\beta} = b, \quad \alpha\beta\overline{\beta} = -1$ です。

$\beta = \alpha - \dfrac{3a}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}i$ のとき
$-3a = \alpha+\beta+\overline{\beta} = 3\alpha - 3a$ より $\alpha = 0$ に成ってしまうので不適です。

$\beta = \alpha + \dfrac{3a}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}i$ のとき
$-3a = \alpha+\beta+\overline{\beta} = 3\alpha + 3a$ より $\alpha = -2a$ なので $\beta = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}i$ です。
$-1 = \alpha\beta\overline{\beta} = -2a^3$ より $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\quad b = \alpha(\beta+\overline{\beta})+\beta\overline{\beta} = 3a^2 = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ です。
以上より $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ b = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ です。