

2020 年九州大学後理系問題 4

$x, y$  は  $x^2 + y^2 \neq 0$  を満たす実数です。

$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  の最大値と最小値を求めてください。

### 解説・解答

$$\frac{|-x| + |y|}{\sqrt{(-x)^2 + y^2}} = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x| + |-y|}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}} \text{ なので } x \geq 0, y \geq 0 \text{ を調べれば良いです。}$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  ( $r > 0, 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) と置きます。

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|r \cos \theta| + |r \sin \theta|}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} = \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r} = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$$

$1 \leq \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) \leq \sqrt{2}$  なので、最大値  $\sqrt{2}$ 、最小値 1 です。