2020 年神戸大学理系問題 5

p は 2 以上の整数です。
$a_1 = \dfrac{1}{2^p+1}$, $a_{n+1} = \left|2a_n - 1\right|$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定めます。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$p>5$ の場合、第 5 項まで計算してみます。

$$a_2=\left|2a_1-1\right|=\left|\frac{2}{2^p+1}-1\right|=1-\frac{2}{2^p+1}=\frac{2^p-1}{2^p+1}$$

$$a_3=\left|2a_2-1\right|=\left|\frac{2(2^p-1)}{2^p+1}-1\right|=\frac{2(2^p-1)}{2^p+1}-1=\frac{2^p-3}{2^p+1}$$

$$a_4=\left|2a_3-1\right|=\left|\frac{2(2^p-3)}{2^p+1}-1\right|=\frac{2(2^p-3)}{2^p+1}-1=\frac{2^p-7}{2^p+1}$$

$$a_5=\left|2a_4-1\right|=\left|\frac{2(2^p-7)}{2^p+1}-1\right|=\frac{2(2^p-7)}{2^p+1}-1=\frac{2^p-15}{2^p+1}$$

$n=2,3,4,\cdots,p+1$ で $a_n=\dfrac{2^p-2^{n-1}+1}{2^p+1}$ だと推定できます。

$k=2,3,4,\cdots,p$ のとき $a_k=\dfrac{2^p-2^{k-1}+1}{2^p+1}$ と仮定すると

$$a_{k+1}=\left|2a_k-1\right|=\left|\frac{2(2^p-2^{k-1}+1)}{2^p+1}-1\right|=\frac{2(2^p-2^{k-1}+1)}{2^p+1}-1=\frac{2^p-2^k+1}{2^p+1}$$

よって $n=k+1$ でも成り立っています。

数学的帰納法により $n=2,3,4,\cdots,p+1$ で $a_n=\dfrac{2^p-2^{n-1}+1}{2^p+1}$ です。

$a_{p+1}=\dfrac{2^p-2^p+1}{2^p+1}=\dfrac{1}{2^p+1}=a_1$ なので以降は繰り返しです。

以上より、$n-1$ を p で割った余りを r とし、

$r=0$ のとき $a_n=\dfrac{1}{2^p+1}$，　$r\neq 0$ のとき $a_n=\dfrac{2^p-2^r+1}{2^p+1}$ です。