2020 年関西学院大学理系問題 *3*

数列 $\{a_n\}$ は 初項 $3,$ 公比 3 の等比数列とします。

数列 $\{b_n\}$ は $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ で定義します。

数列 $\{c_n\}$ について $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k = \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{36}$ が成り立つとします。

$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めてください。

解説・解答

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \ , \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$a_1 = 3$, $b_1 = 1$ より $S_1 = a_1 b_1 c_1 = 3c_1 = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7}{36}$ なので $c_1 = T_1 = \dfrac{35}{36}$ です。

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n b_n c_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{36} - \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{36} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

よって $c_n = \dfrac{(2n+1)(2n+3)}{6a_n b_n} = \dfrac{2n+3}{3^n n(n+1)} = \dfrac{1}{3^{n-1}n} - \dfrac{1}{3^n(n+1)}$ です。

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} c_k \\ &= c_1 + \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{1}{3^{k-1}k} - \frac{1}{3^k(k+1)} \right\} \\ &= \frac{35}{36} + \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{3^n(n+1)} \right\} \\ &= \frac{41}{36} - \frac{1}{3^n(n+1)} \end{aligned}$$

この式は $n = 1$ でも成り立っています。