2020 年慶應義塾大学環境情報学部問題 4

$f(x) = x^3 - 20x^2 + mx - 2(m-1)$ とします。
方程式 $f(x) = 0$ が 3 つの異なる正の整数解を持つような整数 m の値を求めてください。

解説・解答

3 つの異なる正の整数解を $\alpha, \beta, \gamma \, (1 \leqq \alpha < \beta < \gamma)$ と置きます。
解と係数の関係より $\alpha + \beta + \gamma = 20$,　$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = m$ です。
$\beta \geqq \alpha + 1 \geqq 2,\ \gamma \geqq \alpha + 2 \geqq 3$ なので、
$\alpha + (\alpha + 1) + (\alpha + 2) \leqq 20$,　$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \leqq m$ です。
よって $1 \leqq \alpha \leqq 5$,　$m \geqq 11$ です。

$\alpha = 1$ のとき
$f(1) = -m - 17 = 0$ より $m = -17 < 11$ なので不適です。

$\alpha = 2$ のとき
$f(2) = -70 \neq 0$ なので不適です。

$\alpha = 3$ のとき
$f(3) = m - 151 = 0$ より $m = 151$ です。
$x^3 - 20x^2 + mx - 2(m-1) = x^3 - 20x^2 + 151x - 300 = (x-3)(x^2 - 17x + 100) = 0$
3 つの異なる正の整数解を持たないので不適です。

$\alpha = 4$ のとき
$f(4) = 2m - 254 = 0$ より $m = 127$ です。
$x^3 - 20x^2 + mx - 2(m-1) = x^3 - 20x^2 + 127x - 252 = (x-4)(x-7)(x-9) = 0$
3 つの異なる正の整数解 $x = 4, 7, 9$ を持ちます。

$\alpha = 5$ のとき
$f(5) = 3m - 373 = 0$ より m が整数にならないので不適です。

以上より $m = 127$ です。