2020 年慶應義塾大学環境情報学部問題 3

数列 $\{a_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ は $a_1=1,\ a_2=2,$
n が 3 以上の奇数のとき $a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$ が等差数列、
n が 4 以上の偶数のとき $a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$ が等比数列です。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

最初の何項かを書き出します。
$a_1=\dfrac{2}{2},\ a_2=\dfrac{4}{2},\ a_3=\dfrac{6}{2},\ a_4=\dfrac{9}{2},\ a_5=\dfrac{12}{2},\ a_6=\dfrac{16}{2},\ a_7=\dfrac{20}{2},\ a_8=\dfrac{25}{2},\ \cdots\cdots$
自然数 k に対して $a_{2k-1}=\dfrac{k(k+1)}{2},\quad a_{2k}=\dfrac{(k+1)^2}{2}$ と推定できます。

$k=1$ のとき $a_1=1,\ a_2=2$ なので成立します。
$k=j$ のとき成立していると仮定します $a_{2j-1}=\dfrac{j(j+1)}{2},\quad a_{2j}=\dfrac{(j+1)^2}{2}$
$a_{2j-1},\ a_{2j},\ a_{2j+1}$ が等差数列なので $a_{2j+1}=2a_{2j}-a_{2j-1}=\dfrac{(j+1)(j+2)}{2}$ です。
$a_{2j},\ a_{2j+1},\ a_{2j+2}$ が等比数列なので $a_{2j+2}=\dfrac{(a_{2j+1})^2}{a_{2j}}=\dfrac{(j+2)^2}{2}$ です。
よって $k=j+1$ のときも成立します。
数学的帰納法により全ての自然数 k で成立します。

$n=2k-1$ のとき $a_n=a_{2k-1}=\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+3)}{8}=\dfrac{2n^2+8n+7-1}{16}$

$n=2k$ のとき $a_n=a_{2k}=\dfrac{(k+1)^2}{2}=\dfrac{(n+2)^2}{8}=\dfrac{2n^2+8n+7+1}{16}$

以上より $a_n=\dfrac{2n^2+8n+7+(-1)^n}{16}$ です。