2020 年慶應義塾大学医学部問題 3

n は自然数です。

$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin^2 \theta}$ とします。$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$ を求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned}
f\left(\theta\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta)} \\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{4}{(2\sin\theta\ \cos\theta)^2} \\
&= \frac{4}{\sin^2 2\theta}=4f\left(2\theta\right)
\end{aligned}$$

$$S_1=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=2$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2^n\pi}{2^{n+2}}\right)+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2^n\pi}{2^{n+2}}\right)+\sum_{j=1}^{2^n-1} f\left(\frac{(2^{n+1}-j)\pi}{2^{n+2}}\right) \qquad (j=2^{n+1}-k\text{ と置く}) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sum_{j=1}^{2^n-1} f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{j\pi}{2^{n+2}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n-1} \left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)\right\}+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n-1} 4f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 4S_n+2
\end{aligned}$$

$S_{n+1}+\dfrac{2}{3}=4\left(S_n+\dfrac{2}{3}\right)$ に式変形できるので $S_n+\dfrac{2}{3}=4^{n-1}\left(S_1+\dfrac{2}{3}\right)$ です。
よって $S_n=4^{n-1}\left(2+\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$ です。