2020年一橋大学問題 1

n は正の整数です。
硬貨を投げ表なら 1 点、裏なら 2 点を得るという試行を繰り返し行います。
点の合計がちょうど n となる確率を p_n とします。
$|p_{n+1} - p_n| < 0.01$ を満たす最小の n を求めてください。

解説・解答

合計点が 1 になるのは、1 回目が表のときなので $p_1 = \dfrac{1}{2}$ です。
合計点が 2 になるのは、1 回目と 2 回目が共に表、または、1 回目が裏です。
よって $p_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$ です。

合計点が $n+2$ になるのは、$n+1$ のときに表、または、n のときに裏です。
よって $p_{n+2} = \dfrac{1}{2}p_{n+1} + \dfrac{1}{2}p_n$ です。
$p_{n+2} - p_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$ に式変形できるので,
$p_{n+1} - p_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2 - p_1) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ です。

$|p_{n+1} - p_n| = \dfrac{1}{2^{n+1}} < 0.01$ より $2^n > 50$ です。
$32 = 2^5 < 50 < 2^6 = 64$ なので、条件を満たす最小の n は 6 です。