2020 年一橋大学問題 *3*

半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C があります。
内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の最大値と最小値を求めてください。

解説・解答

直径が 2 だから $|\overrightarrow{AB}| \leqq 2,\ |\overrightarrow{AC}| \leqq 2$ なので、
直径の一端が A でもう一端が B, C のときに
最大値 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2\ \cos 0 = 4$ です。

対称性を考慮して $0 \leqq \alpha < 2\pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi$ とし、
$A(-1, 0), B(\cos\alpha, \sin\alpha), C(\cos\beta, \sin\beta)$ と置けます。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\cos\alpha + 1)(\cos\beta + 1) + \sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta + 1 \\
&= \cos(\alpha - \beta) + \cos\alpha + \cos\beta + 1 \\
&= 2\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2} + \cos\beta + 1 & \left(-1 \leqq \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \leqq 1,\ 0 \leqq \cos\frac{\beta}{2} \leqq 1\right) \\
&\geqq -2\cos\frac{\beta}{2} + \cos\beta + 1 & \left(\alpha - \frac{\beta}{2} = \pi \text{ のとき等号成立}\right) \\
&= -2\cos\frac{\beta}{2} + \left(2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1\right) + 1 \\
&= 2\left(\cos\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1,}{2} \\
&\geqq -\frac{1}{2} & \left(\beta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき等号成立}\right)
\end{aligned}
$$

以上より、内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の最大値は 4, 最小値は $-\dfrac{1}{2}$ です。