2020 年一橋大学問題 *1*

100 桁の正の整数で各桁の数の和が 2 となるもののうち、
2020 で割り切れるものの個数を求めてください。

解説・解答

素因数分解すると $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ です。

100 桁の正の整数で各桁の数の和が 2 となるものは次のように表せます。
$10^{99} + 10^k \ (k = 0, 1, 2, \cdots, 99)$

$10^{99} = 2^{99} \cdot 5^{99}$ は $2^2 \cdot 5 = 20$ で割り切れ、
$10^0 = 1$, $10^1 = 10$ は 20 で割り切れないので $k = 0$, 1 は不適です。

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 9 \cdot 101 + 91$, $10^4 = 99 \cdot 101 + 1$, $\cdots\cdots$
n を 0 以上の整数として、
$10^{4n}, 10^{4n+1}, 10^{4n+2}, 10^{4n+3}$ を 101 で割った余りはそれぞれ $1, 10, 100, 91$ です。

$10^{99} = 10^{24 \cdot 4+3}$ を 101 で割った余りは 91 なので、
10^k を 101 で割った余りは $101 - 91 = 10$ に限定されます。
$2 \leqq 4n + 1 \leqq 99$ より $n = 1, 2, 3, \cdots, 24$ です。

以上より、条件を満たすものは 24 個です。