

2020 年広島大学後期理系問題 5

実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表します。

p を素数として $\sum_{k=1}^{p^2-1} \left[\frac{k^3}{p^2} \right]$ を計算してください。

解説・解答

$p = 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^3 \left[\frac{k^3}{4} \right] = \left[\frac{1}{4} \right] + \left[\frac{8}{4} \right] + \left[\frac{27}{4} \right] = 8$$

$p \geq 3$ のとき p は奇数なので $p-1, p^2-1$ は偶数です。

$k \neq pt$ ($t = 1, 2, 3, \dots, p-1$) の場合

$$\left[\frac{k^3}{p^2} \right] = m \text{ とすれば } m < \frac{k^3}{p^2} < m+1 \text{ なので、}$$

$$-m-1 < -\frac{k^3}{p^2} < -m \text{ だから } \left[-\frac{k^3}{p^2} \right] = -m-1 \text{ です。}$$

$$\frac{(p^2-k)^3}{p^2} = p^4 - 3p^2k + 3k^2 - \frac{k^3}{p^2} \text{ なので } \left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2} \right] = p^4 - 3p^2k + 3k^2 - m - 1$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{k^3}{p^2} \right] + \left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2} \right] &= m + (p^4 - 3p^2k + 3k^2 - m - 1) \\ &= p^4 - 1 - 3p^2k + 3k^2 \end{aligned}$$

$k = pt$ ($t = 1, 2, 3, \dots, p-1$) の場合

$$\begin{aligned} \left[\frac{k^3}{p^2} \right] + \left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2} \right] &= \left[\frac{(pt)^3}{p^2} \right] + \left[\frac{(p^2-pt)^3}{p^2} \right] \\ &= [pt^3] + [p^4 - 3p^3t + 3p^2t^2 - pt^3] \\ &= p^4 - 3p^3t + 3p^2t^2 \\ &= p^4 - 3p^2k + 3k^2 \\ &= (p^4 - 1 - 3p^2k + 3k^2) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p^2-1} \left[\frac{k^3}{p^2} \right] &= \sum_{k=1}^{\frac{p^2-1}{2}} \left(\left[\frac{k^3}{p^2} \right] + \left[\frac{(p^2-k)^3}{p^2} \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{p^2-1}{2}} (p^4 - 1 - 3p^2k + 3k^2) + \sum_{t=1}^{\frac{p-1}{2}} 1 \\ &= (p^4 - 1) \cdot \frac{(p^2-1)}{2} - 3p^2 \cdot \frac{\frac{p^2-1}{2} \cdot \frac{p^2+1}{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\frac{p^2-1}{2} \cdot \frac{p^2+1}{2} \cdot p^2}{6} + \frac{p-1}{2} \\ &= \frac{p(p-1)(p^4 + p^3 - p^2 - p - 2)}{4} \end{aligned}$$

この式は $p = 2$ でも成り立っています。