*2020* 年広島大学文系問題 *4*

数列 $\{a_n\}$ を次の条件で定めます。
条件「初項 $a_1=1,\ n$ が奇数なら $a_{n+1}=-a_n+1,$ 偶数なら $a_{n+1}=-2a_n+3$」
数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2n-1$ 項までの和 $S_n$ を求めてください。

解説・解答

$a_{2n}=-a_{2n-1}+1$ なので $a_{2n-1}+a_{2n}=1$ です。
$a_{2n+1}=-2a_{2n}+3=-2(-a_{2n-1}+1)+3=2a_{2n-1}+1$
$a_{2n+1}+1=2(a_{2n-1}+1)$ に式変形できるので
$a_{2n-1}+1=2^{n-1}(a_1+1)=2^{n-1}(1+1)=2^n$ です。
よって $a_{2n-1}=2^n-1$ です。
$a_{2n}=-a_{2n-1}+1=-(2^n-1)+1=-2^n+2$

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n-1}a_k=\sum_{l=1}^{n}(a_{2l-1}+a_{2l})-a_{2n}=n-(-2^n+2)=n+2^n-2$$