

2020 年北海道大学理系問題 3

$n$  は 2 以上の自然数です。

サイコロを  $n$  回投げ、出た目を順に  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  とします。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  の最小公倍数が 20 となる確率を求めてください。

## 解説・解答

サイコロの目は  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  なので、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  は全部で  $6^n$  通りあります。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  の最小公倍数が 20 となるのは、  
4, 5 が少なくとも 1 回ずつは出て、 $\{1, 2, 4, 5\}$  だけが出る時です。

$\{1, 2, 4, 5\}$  だけなのは  $4^n$  通りあります。

$\{1, 2, 4\}$  だけなのは  $3^n$  通りあり、 $\{1, 2, 5\}$  だけなのは  $3^n$  通りあります。

$\{1, 2, 4\}$  だけと  $\{1, 2, 5\}$  だけの共通部分 ( $\{1, 2\}$  だけ) なのは  $2^n$  通りあります。

$\{1, 2, 4, 5\}$  だけで最小公倍数が 20 とならないのは  $3^n + 3^n - 2^n$  通りあります。

最小公倍数が 20 となるのは  $4^n - (3^n + 3^n - 2^n) = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$  通りあります。

以上より、最小公倍数が 20 となる確率は  $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$  です。