

2020年北海道大学理系問題 3

n は 2 以上の自然数です。

サイコロを n 回投げ、出た目を順に $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ とします。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を求めてください。

解説・解答

サイコロの目は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ なので、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ は全部で 6^n 通りあります。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ の最小公倍数が 20 となるのは、
4, 5 が少なくとも 1 回ずつは出て、 $\{1, 2, 4, 5\}$ だけが出るときです。

$\{1, 2, 4, 5\}$ だけなのは 4^n 通りあります。

$\{1, 2, 4\}$ だけなのは 3^n 通りあり、 $\{1, 2, 5\}$ だけなのは 3^n 通りあります。

$\{1, 2, 4\}$ だけと $\{1, 2, 5\}$ だけの共通部分 ($\{1, 2\}$ だけ) なのは 2^n 通りあります。

$\{1, 2, 4, 5\}$ だけで最小公倍数が 20 とならないのは $3^n + 3^n - 2^n$ 通りあります。

最小公倍数が 20 となるのは $4^n - (3^n + 3^n - 2^n) = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$ 通りあります。

以上より、最小公倍数が 20 となる確率は $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$ です。