

2020 年北海道大学文系問題 3

$n$  は 2 以上の自然数です。

サイコロを  $n$  回投げ、出た目を順に  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  とします。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  の最大公約数が 1 となる確率を求めてください。

## 解説・解答

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  は全部で  $6^n$  通りあります。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  の最大公約数は  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  のいずれかです。

最大公約数が偶数のとき

$2, 4, 6$  の目だけが出れば良いので

$3^n$  通りあります。

最大公約数が  $5$  のとき

$5$  の目だけが出れば良いので

$1^n$  通りあります。

最大公約数が  $3$  のとき

$3, 6$  の目だけが出る場合から  $6$  の目だけが出る場合を除けば良いので

$2^n - 1^n$  通りあります。

最大公約数が  $1$  のとき

$6^n - \{3^n + 1^n + (2^n - 1^n)\} = 6^n - 2^n - 3^n$  通りあります。

以上より、最大公約数が  $1$  となる確率は  $\frac{6^n - 2^n - 3^n}{6^n}$  です。