

2020年北海道大学文系問題 3

n は 2 以上の自然数です。

サイコロを n 回投げ、出た目を順に $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ とします。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ の最大公約数が 1 となる確率を求めてください。

解説・解答

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ は全部で 6^n 通りあります。

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ の最大公約数は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかです。

最大公約数が偶数のとき

2, 4, 6 の目だけが出れば良いので

3^n 通りあります。

最大公約数が 5 のとき

5 の目だけが出れば良いので

1^n 通りあります。

最大公約数が 3 のとき

3, 6 の目だけが出る場合から 6 の目だけが出る場合を除けば良いので

$2^n - 1^n$ 通りあります。

最大公約数が 1 のとき

$6^n - \{3^n + 1^n + (2^n - 1^n)\} = 6^n - 2^n - 3^n$ 通りあります。

以上より、最大公約数が 1 となる確率は $\frac{6^n - 2^n - 3^n}{6^n}$ です。