

2020年岐阜大学医学部問題3

次の条件を満たす実数の組  $(\alpha, \beta)$  を求めてください。

$$0 \leq \alpha < \beta < 2\pi, \quad \cos \alpha = \cos \beta, \quad \sin 5\alpha = \sin 5\beta$$

## 解説・解答

$\cos \alpha = \cos \beta$  より  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$  です。

$0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$  より  $0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 2\pi$ ,  $-\pi < \frac{\alpha - \beta}{2} < 0$  なので  $\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi$  です。  
よって  $\beta = 2\pi - \alpha$  です。

$\sin 5\alpha = \sin 5\beta = \sin(10\pi - 5\alpha) = -\sin 5\alpha$  なので  $\sin 5\alpha = 0$  です。

$0 \leq \alpha < \beta = 2\pi - \alpha < 2\pi$  より  $0 < \alpha < \pi$  なので  $\alpha = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$  です。

以上より  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right), \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\right), \left(\frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}\right), \left(\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right)$  です。