

2020 年同志社大学文系問題 3

$a_1 = 2, a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定められる数列の一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ と置けば $\frac{b_2}{b_1} = 2, \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 5 - \frac{4b_n}{b_{n+1}}$
 $b_2 = 2b_1, b_{n+2} - b_{n+1} = 4(b_{n+1} - b_n)$ に式変形できるので
 $b_{n+1} - b_n = 4^{n-1}(b_2 - b_1) = 4^{n-1}b_1$ です。

$n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{k-1}b_1 = b_1 + \frac{(4^{n-1} - 1)b_1}{4 - 1} = \frac{(4^{n-1} + 2)b_1}{3}$$

$$a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2}$$

この式は $n=1$ でも成り立っています。