

2020年旭川医科大学医学部問題4

次の2式を満たす有理数 a, b, c, d を求めてください。

$$2^{a+b-2} = 9^{b-c}, \quad 2^{2a-d} = 3^{3a-b+1}$$

解説・解答

$\log_2 3 = \frac{n}{m}$ (m, n は互い素な自然数) と仮定します。
 $2^n = 3^m$ となり、左辺は偶数で右辺は奇数なので矛盾します。
よって $\log_2 3$ は無理数です。

$2^{a+b-2} = 9^{b-c}$, $2^{2a-d} = 3^{3a-b+1}$ より
 $a+b-2 = 2(b-c) \log_2 3$, $2a-d = (3a-b+1) \log_2 3$ です。

a, b, c, d が有理数で $\log_2 3$ が無理数なので
 $a+b-2 = 0$, $2(b-c) = 0$, $2a-d = 0$, $3a-b+1 = 0$ です。

連立方程式を解いて $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ です。