

2020 年旭川医科大学医学部問題 4

次の 2 式を満たす有理数 a, b, c, d を求めてください。

$$2^{a+b-2} = 9^{b-c}, \quad 2^{2a-d} = 3^{3a-b+1}$$

解説・解答

$\log_2 3 = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数) と仮定します。

$2^n = 3^m$ となり、左辺は偶数で右辺は奇数なので矛盾します。

よって $\log_2 3$ は無理数です。

$$2^{a+b-2} = 9^{b-c}, \quad 2^{2a-d} = 3^{3a-b+1} \quad \text{より}$$

$$a + b - 2 = 2(b - c) \log_2 3, \quad 2a - d = (3a - b + 1) \log_2 3 \quad \text{です。}$$

a, b, c, d が有理数で $\log_2 3$ が無理数なので

$$a + b - 2 = 0, \quad 2(b - c) = 0, \quad 2a - d = 0, \quad 3a - b + 1 = 0 \quad \text{です。}$$

連立方程式を解いて $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ です。