

2019年横浜市立大学医学部問題 1

$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$ を計算してください。

解説・解答

半角の公式より $\tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = (2 - \sqrt{3})^2$ です。

$\tan \frac{\pi}{12} > 0$ なので $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ です。

二倍角の公式より $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{24}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{24}} = 2 - \sqrt{3}$ です。

整理すると $\left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}}\right)^2 - 2(2 + \sqrt{3})\left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}}\right) - 1 = 0$ です。

$\tan \frac{\pi}{24} > 0$ を考慮して二次方程式を解くと

$$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

以上より $\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} = 2$ です。