2019 年横浜市立大学医学部問題 *2*

a, b, c は実数であり， $\dfrac{c+1}{a+b+c+1}$ は整数です。
方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は異なる三つの整数解を持ち、
それらの解は全て 3 以上の奇数です。
a, b, c の値を求めてください。

解説・解答

l, m, n を整数として、三つの解を $2l+1,\, 2m+1,\, 2n+1$ ($1 \leqq l < m < n$) と置きます。
$x^3+ax^2+bx+c = \big(x-(2l+1)\big)\big(x-(2m+1)\big)\big(x-(2n+1)\big)$
$x=0$ を代入より $c = -(2l+1)(2m+1)(2n+1)$ です。
$x=1$ を代入より $1+a+b+c = -8lmn$ です。

$$\begin{aligned}\frac{c+1}{a+b+c+1} &= \frac{-(2l+1)(2m+1)(2n+1)+1}{-8lmn} \\ &= \frac{4lmn+2lm+2mn+2ml+l+m+n}{4lmn} > 1 \\ &= \frac{2l+1}{2l}\cdot\frac{2m+1}{2m}\cdot\frac{2n+1}{2n} - \frac{1}{8lmn} < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6} = \frac{35}{16} = 2.1875\end{aligned}$$

$\dfrac{c+1}{a+b+c+1}$ は整数なので $\dfrac{c+1}{a+b+c+1} = \dfrac{(2l+1)(2m+1)(2n+1)-1}{8lmn} = 2$ です。

$l=1$ のとき $\dfrac{3(2m+1)(2n+1)-1}{8mn} = 2$
$(2m-3)(2n-3)=11$ に式変形できるので $(m,n)=(2,7)$ です。
よって、三つの解は $2l+1=3,\ 2m+1=5,\ 2n+1=15$ なので
$x^3+ax^2+bx+c=(x-3)(x-5)(x-15)=x^3-23x^2+135x-225$ です。

$l \geqq 2$ のとき $\dfrac{(2l+1)(2m+1)(2n+1)-1}{8lmn} = 2$
$l = \dfrac{2mn+m+n}{4mn-2m-2n-1} \geqq 2$ より $(6m-5)(6n-5) \leqq 37$ です。
$m \geqq 3$, $n \geqq 4$ なので、条件を満たす m, n はありません。

以上より $a=-23$, $b=135$, $c=-225$ です。