*2019*年早稲田大学理工学部問題 *3*

実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表します。
n を正の整数とし $S_n=\left[\sqrt{1}\,\right]+\left[\sqrt{2}\,\right]+\left[\sqrt{3}\,\right]+\cdots+\left[\sqrt{n}\,\right]$ とします。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}}$ を求めてください。

解説・解答

正整数 k で $\sqrt{k}-1<\left[\sqrt{k}\,\right] \leqq \sqrt{k}$ なので $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-1\right)<S_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ です。

$n\sqrt{n}$ で割れば $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{S_n}{n\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ です。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$$

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$ です。