2019 年東京大学理系問題 *4*

整数の 2 乗で表せる数を平方数といいます。
n は正の整数とします。
$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数にならないことを示してください。

解説・解答

n^2+1 と $5n^2+9=5(n^2+1)+4$ の最大公約数は互除法により
n^2+1 と 4 の最大公約数と同じです。

正の整数 a, b が互いに素で ab が平方数となるのは
a, b が両方とも平方数の場合です。

$n=2m$ (m は正の整数) のとき
$n^2+1=4m^2+1$ と 4 は互いに素なので、
n^2+1 と $5n^2+9$ は互いに素です。
$1 \leqq n^2 < n^2+1 < n^2+2n+1=(n+1)^2$ なので、
n^2+1 は平方数ではありません。
よって $(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数になりません。

$n=2m-1$ (m は正の整数) のとき
$n^2+1=2(2m^2-2m+1)$ と 4 の最大公約数は 2 なので、
n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数は 2 です。
$n^2+1=2a,\ 5n^2+9=2b$ (a, b は正の整数) と置けば a, b は互いに素です。
$2(5j+k)^2$ $\bigl(j$ は整数, $k=0,1,2,3,4\bigr)$ を 5 で割った余りは $0, 2, 3$ のいずれかです。
$2b$ を 5 で割った余りは 4 なので b は平方数ではありません。
よって $(n^2+1)(5n^2+9)=2^2ab$ は平方数になりません。

以上より $(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数になりません。