2019 年東京大学理系問題 2

一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ を考えます。
3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上ににあり、
三角形 APQ と三角形 PQR はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ です。
$\dfrac{DR}{AQ}$ の最大値と最小値を求めてください。

解説・解答

$AP=x\ (0\leqq x\leqq 1)$ と置きます。

$\triangle APQ=\dfrac{AP\cdot AQ}{2}=\dfrac{1}{3}$ より $AQ=\dfrac{2}{3x}$ です。

$\triangle APR=\dfrac{AP\cdot AD}{2}=\dfrac{x}{2}$

$\triangle AQR=\dfrac{AQ\cdot DR}{2}=\dfrac{DR}{3x}$

$\square APRQ=\triangle APR+\triangle AQR=\triangle APQ+\triangle PQR=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ なので

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{DR}{3x}=\dfrac{2}{3}$ より $DQ=\dfrac{-3x^2+4x}{2}$ です。

点 Q,R はそれぞれ辺 AD,DC 上にあるので $0\leqq\dfrac{2}{3x}\leqq 1,\quad 0\leqq\dfrac{-3x^2+4x}{2}\leqq 1$ です。

よって $\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 1$ です。

$f(x)=\dfrac{DR}{AQ}=\dfrac{-9x^3+12x^2}{4}$ と置き、微分して $f'(x)=-\dfrac{3x(9x-8)}{4}$、増減を調べると、

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3},\quad \dfrac{2}{3}<x<\dfrac{8}{9}$ で増加, $\quad f\left(\dfrac{8}{9}\right)=\dfrac{64}{81},\quad \dfrac{8}{9}<x<1$ で減少, $\quad f\left(1\right)=\dfrac{3}{4}$

以上より、最大値 $\dfrac{64}{81}$, 最小値 $\dfrac{2}{3}$ です。