2019 年東京工業大学問題 *5*

$a_n = \dfrac{3^{4n} \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{8n} \cdot n!} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とします。

数列 $\{a_n\}$ の項の最大値を求めてください。

解説・解答

$x>0$ で $f(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ と置きます。

$f'(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x}=\Big[\log t\Big]_x^{x+1}-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right)dt$

$0<x<t<x+1$ のとき $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{x}<0$ なので $f'(x)<0$ です。

よって $f(x)$ は減少なので $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$ です。

$\log\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)=\log\left(\dfrac{3^4\cdot(n+1)^{n+1}}{2^8\cdot n^{n+1}}\right)=\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\log\left(\dfrac{4}{3}\right)^4=f(n)-f(3)$ です。

よって $\log\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)>0$, $\log\left(\dfrac{a_3}{a_2}\right)=0$, $\log\left(\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right)<0$ $(k=4,5,6,\cdots)$ なので

$a_1<a_2=a_3>a_4>a_5>\cdots$ です。

以上より、最大値は $a_2=a_3=\dfrac{3^{11}}{2^{17}}=\dfrac{177147}{131072}$ です。