2019 年東京工業大学問題 1

四面体 $ABCD$ の表面積を S とし、
辺 BC, CA, AB, AD, BD, CD の長さをそれぞれ a, b, c, l, m, n とします。
不等式 $a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2\sqrt{3}S$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

座標平面で、頂点 A を原点に置いて、辺 BC を y 軸と並行になるように置いて
$A(0,0),\ B(h,s),\ C(h,t)\quad (h>0,\ s<t)$ とします。
$a=t-s,\ b^2=h^2+t^2,\ c^2=h^2+s^2,\ 2\triangle ABC=(t-s)h$ です。

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\triangle ABC &= (t-s)^2+(h^2+t^2)+(h^2+s^2)-2\sqrt{3}(t-s)h\\ &= 2\Bigl(h-\frac{\sqrt{3}(t-s)}{2}\Bigr)^2+\frac{(s+t)^2}{2} \geqq 0\end{aligned}$$

よって $a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle ABC$ です。
$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}},\ t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ のときに等号が成立するので、
三角形 ABC が正三角形のときに等号成立です。

同様にして次の 3 つの不等式が求められます。
$c^2+l^2+m^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle ABD$
$a^2+m^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle BCD$
$b^2+n^2+l^2 \geqq 4\sqrt{3}\triangle CAD$

$S=\triangle ABC+\triangle ABD+\triangle BCD+\triangle CAD$ なので、
4 つの不等式を辺々加えて 2 で割ると $a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}S$ です。
四面体 $ABCD$ が正四面体のときに等号成立です。