2019 年筑波大学問題 5

ネイピア数 e を底とする指数関数 e^x を $\exp(x)$ と書きます。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{\exp\left(2^{-k}\right)+1}{2}\right)$ を求めてください。

解説・解答

$a_k = \exp\left(2^{-k}\right) + 1$, $b_k = \exp\left(2^{-k}\right) - 1$ と置けば、
$a_k b_k = \Big(\exp\left(2^{-k}\right) + 1\Big)\Big(\exp\left(2^{-k}\right) - 1\Big) = \exp\left(2^{-k+1}\right) - 1 = b_{k-1}$ です。

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{\exp\left(2^{-k}\right) + 1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{a_k}{2}\right)$$
$= \log\left(2^{-n} a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_{n-2} a_{n-1} a_n\right)$
$= \log\left(2^{-n} a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_{n-2} a_{n-1} a_n\right) + \log b_n - \log b_n$
$= \log\left(2^{-n} a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_{n-2} a_{n-1} a_n b_n\right) - \log b_n$
$= \log\left(2^{-n} a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_{n-2} a_{n-1} b_{n-1}\right) - \log b_n$
$= \log\left(2^{-n} a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_{n-2} b_{n-2}\right) - \log b_n$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$= \log\left(2^{-n} a_1 b_1\right) - \log b_n$
$= \log\left(2^{-n} b_0\right) - \log b_n$
$= \log\Big(2^{-n}\Big(e - 1\Big)\Big) - \log\Big(\exp\left(2^{-n}\right) - 1\Big)$
$= \log(e-1) - \log\dfrac{\exp(2^{-n}) - 1}{2^{-n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\frac{\exp(2^{-n}) - 1}{2^{-n}} = \lim_{h\to+0} \log\frac{e^h - 1}{h} = \log e^0 = 0$　　($h = 2^{-n}$ と置いた)

以上より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{\exp\left(2^{-k}\right) + 1}{2}\right) = \log(e-1)$ です。