*2019*年筑波大学問題 *2*

n は正の整数です。
不等式 $1 < \dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$ が成り立つことを証明してください。

解説・解答

$\log_2 5 > \log_2 4 = 2 = \log_3 9 > \log_3 5 > \log_3 3 = 1$ なので
$\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} > \dfrac{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} = 1$ です。

$\log_2 5 > \log_2 4 = 2 > \log_2 3 > \log_2 2 = 1$ なので
$2\log_3 5 - \log_2 5 = \dfrac{2\log_2 5}{\log_2 3} - \log_2 5 = \dfrac{(2-\log_2 3)\log_2 5}{\log_2 3} > 0$
よって　$2\log_3 5 > \log_2 5$ です。

$1 < 2^n$,　$\log_2 5 < 2\log_3 5 < 2^n \log_3 5$ なので
$\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < \dfrac{2^n+2^n\log_3 5+(2\log_3 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} = 2^n$ です。

以上より　$1 < \dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$　です。