2019 年東京医科歯科大学医学部問題 2

三角形 ABC の内角をそれぞれ A, B, C とし、対辺の長さをそれぞれ a, b, c とします。
a, b, c はこの順で正の公差をもつ等差数列です。
$C = A + 60^\circ$ のとき $\cos A$ の値を求めてください。

解説・解答

相似な三角形なら $\cos A$ の値は同じなので、
公差を $d\,(d>0)$ として $a=BC=1,\ b=CA=1+d,\ c=AB=1+2d$ と置きます。

$\angle ACP=60^\circ,\ \angle BCP=A$ を満たす点 P を辺 AB 上にとります。
三角形 ABC と三角形 CBP は相似なので $AB:CB=BC:BP=CA:PC$ です。
よって $BP=\dfrac{CB\cdot BC}{AB}=\dfrac{1}{1+2d}$, $PC=\dfrac{CB\cdot CA}{AB}=\dfrac{1+d}{1+2d}$ です。

$AP=AB-BP=\dfrac{4d(1+d)}{1+2d}$ です。

三角形 ACP での余弦定理より
$$PA^2-\left(AC^2+CP^2-2AC\cdot CP\cos 60^\circ\right)=\frac{(1+d)^2(12d^2-2d-1)}{(1+2d)^2}=0$$
$d>0$ なので $d=\dfrac{1+\sqrt{13}}{12}$ です。

三角形 ABC での余弦定理より
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1+5d}{2(1+2d)}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$ です。