2019 年東京医科歯科大学医学部問題 *1*

n は 5 以上の自然数、k は n 以下の自然数とし、サイコロを n 回投げます。
k 回目、4 以下の目なら $a_k = 1$ とし、5 以上の目なら $a_k = 0$ とします。
$b_1 = 0, \quad b_{k+1} = (a_k + a_{k+1})(2 - a_k - a_{k+1}), \quad S_n = b_1 + \dfrac{b_2}{2} + \dfrac{b_3}{2^2} + \cdots + \dfrac{b_n}{2^{n-1}}$ とします。
$\dfrac{5}{8} \leqq S_n < \dfrac{15}{16}$ となる確率を求めてください。

解説・解答

$a_k=1$ となる確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$、　$a_k=0$ となる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ です。

$(a_{k-1},a_k)=(0,0),(1,1)$ で $b_k=0$、　$(a_{k-1},a_k)=(0,1),(1,0)$ で $b_k=1$ です。

$\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3}=\left(0.101\right)_2$　　二進数を $(\ )_2$ で表しています

$\dfrac{15}{16}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}=\left(0.1111\right)_2$

条件を二進数で表すと $\left(0.101\right)_2 \leqq \left(0.b_2b_3b_4\cdots b_n\right)_2 < \left(0.1111\right)_2$ です。
余事象の確率を求めて 1 から引きます。

$\left(0.b_2b_3b_4\cdots b_n\right)_2 < \left(0.1\right)_2$ のとき
$b_2=0,\ b_3$以降は 0 でも 1 でも良いです。
$(a_1,a_2)=(0,0),(1,1)$ なので確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\left(0.1\right)_2 \leqq \left(0.b_2b_3b_4\cdots b_n\right)_2 < \left(0.101\right)_2$ のとき
$(b_2,b_3,b_4)=(1,0,0),\ b_5$以降は 0 でも 1 でも良いです。
$(a_1,a_2,a_3,a_4)=(0,1,1,1),(1,0,0,0)$ なので確率は $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{10}{81}$

$\left(0.1111\right)_2 \leqq \left(0.b_2b_3b_4\cdots b_n\right)_2$ のとき
$(b_2,b_3,b_4,b_5)=(1,1,1,1),\ b_6$以降は 0 でも 1 でも良いです。
$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(0,1,0,1,0),(1,0,1,0,1)$ なので確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{81}$

以上より、求める確率は $1-\left(\dfrac{5}{9}+\dfrac{10}{81}+\dfrac{4}{81}\right)=\dfrac{22}{81}$ です。