2019 年千葉大学問題 8

三角形 ABC の内接円の半径は 4 であり $AB+CA=2BC$ です。
$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D として $AD=15$ です。
辺 BC の長さを求めてください。

解説・解答

内接円の中心を P と置き、
$a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ と置きます。
$a>0$, $b>0$, $c>0$, $b+c=2a$

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{bc\sin A}{2} \\ &= \triangle ACD + \triangle ABD = \frac{15(b+c)\sin\frac{A}{2}}{2} = 15a\sin\frac{A}{2} \\ &= \triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = \frac{4(a+b+c)}{2} = 6a\end{aligned}$$

$15a\sin\dfrac{A}{2}=6a$ より $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{2}{5}$ です。

$0<\angle A<180^\circ$ より $\cos\dfrac{A}{2}>0$ なので $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{1-\sin^2\dfrac{A}{2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ です。
$\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{4\sqrt{21}}{25}$, $\cos A=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{17}{25}$
$\dfrac{bc\sin A}{2}=6a$ より $bc=\dfrac{12a}{\sin A}=\dfrac{25\sqrt{21}\,a}{7}$ です。

三角形 ABC に余弦定理を使います。
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=\{(b+c)^2-2bc\}-2bc\cdot\dfrac{17}{25}=4a^2-12\sqrt{21}\,a$
$(4a^2-12\sqrt{21}\,a)-a^2=3a(a-4\sqrt{21})=0$ なので $a=4\sqrt{21}$ です。

以上より $BC=4\sqrt{21}$ です。