2019 年千葉大学問題 *7*

$a_1 = 3\,,\ a_2 = 2\,,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + a_n - 1\ (n = 2, 3, 4, \cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定めます。
${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_n}^2 = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n + 100$ が成り立つ自然数 n を求めてください。

解説・解答

$n=1$ のとき $a_1=3$
${a_1}^2=3^2\neq 3+100=a_1+100$ なので成り立ちません。

$n\geqq 2$ のとき $a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ より ${a_n}^2=a_{n+1}-a_n+1$, $a_{n+1}+1=(a_n+1)a_n$

$$
\begin{aligned}
{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_n}^2 &= {a_1}^2+\sum_{k=2}^{n}{a_k}^2 \\
&= {a_1}^2+\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_k+1) \\
&= {a_1}^2+(a_{n+1}-a_2)+(n-1) \\
&= (a_{n+1}+1)+n+5 \\
&= (a_n+1)a_n+n+5 \\
&= (a_{n-1}+1)a_{n-1}a_n+n+5 \\
&= (a_{n-2}+1)a_{n-2}a_{n-1}a_n+n+5 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= (a_2+1)a_2a_3\cdots a_n+n+5 \\
&= (2+1)a_2a_3\cdots a_n+n+5 \\
&= a_1a_2a_3\cdots a_n+n+5
\end{aligned}
$$

${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_n}^2=a_1a_2a_3\cdots a_n+100$ より
$n+5=100$ なので $n=95$ です。