

2019年東北大学後期理系問題 5

コイン投げを100回繰り返して行います。

1回目、表なら $a_1 = 0$ とし、裏なら $a_1 = 1$ とします。

n ($n \geq 2$) 回目、表なら $a_n = a_{n-1}$ とし、裏なら $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ とします。

表がちょうど4回出たとき $a_{100} < \frac{2^{100}}{3}$ となる条件付き確率を求めてください。

解説・解答

$$\frac{2^{n+2}}{3} = \frac{2^n \cdot (3+1)}{3} = 2^n + \frac{2^n}{3} \text{ なので } \frac{2^{100}}{3} = 2^{98} + 2^{96} + 2^{94} + \dots + 2^0 + \frac{1}{3} \text{ です。}$$

n 回目が裏の時に 2^{n-1} が加えられます。

表がちょうど 4 回出て $a_{100} < 2^{98}$ のとき

99, 100 回目が表で、1 回目から 98 回目までの 2 回が表です。

よって ${}_{98}C_2$ 通りあります。

表がちょうど 4 回出て $2^{98} \leq a_{100} < 2^{98} + 2^{96}$ のとき

97, 98, 100 回目が表で、1 回目から 96 回目までの 1 回が表です。

よって ${}_{96}C_1$ 通りあります。

表がちょうど 4 回出て $2^{98} + 2^{96} \leq a_{100} < \frac{2^{100}}{3}$ のとき

95, 96, 98, 100 回目が表です。

よって 1 通りあります。

100 回の中で 4 回だけ表が出るのは ${}_{100}C_4$ 通りあります。

以上より、求める確率は $\frac{{}_{98}C_2 + {}_{96}C_1 + 1}{{}_{100}C_4} = \frac{2}{1617}$ です。