2019 年東北大学後期理系問題 4

関数 $f(x)$ は連続な第 2 次導関数 $f''(x) > 0$ をもちます。
実数 a, b, c, d $(a < b < c < d)$ に対して次の不等式が成り立つことを示してください。

$$f(d-a) + f(c-b) > f(d-b) + f(c-a)$$

解説・解答

$f''(x)>0$ なので $f'(x)$ は増加し続けるから $y=f(x)$ のグラフは下に凸です。
点 $P(p,f(p))$, 点 $Q(q,f(q)$ $(p<q)$ を考えると、
範囲 $p<x<q$ で線分 PQ は曲線 $y=f(x)$ の上に在ります。
t $(0<t<1)$ を用いて $(1-t)f(p)+tf(q)>f\big((1-t)p+tq\big)$ と表せます。

$a<b<c<d$ より $c-b<d-b<d-a,\quad c-b<c-a<d-a$ です。
$(1-s)(c-b)+s(d-a)=d-b,\quad (1-t)(c-b)+t(d-a)=c-a$ を満たす s,t を求めると
$s=\dfrac{(d-b)-(c-b)}{(d-a)-(c-b)},\quad t=\dfrac{(c-a)-(c-b)}{(d-a)-(c-b)}$ です。
$s+t=\dfrac{(d-b)-(c-b)}{(d-a)-(c-b)}+\dfrac{(c-a)-(c-b)}{(d-a)-(c-b)}=1$ です。

以上より、
$(1-s)f(c-b)+sf(d-a)>f(d-b),\quad (1-t)f(c-b)+tf(d-a)>f(c-a)$ です。
辺々加えて $s+t=1$ を使えば $f(d-a)+f(c-b)>f(d-b)+f(c-a)$ です。