

2019年東北大学理系問題 4

x についての整式 $(ax + b)^4$ を $x^2 + 1$ で割った余りが -1 となるような実数の組 (a, b) を求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned}(ax + b)^4 &= \{(ax + b)^2\}^2 \\ &= \{a^2x^2 + 2abx + b^2\}^2 \\ &= \{a^2(x^2 + 1) + (2abx + b^2 - a^2)\}^2 \quad f(x) \text{ は整式です} \\ &= (x^2 + 1)f(x) + \{2abx + (b^2 - a^2)\}^2 \\ &= (x^2 + 1)f(x) + 4a^2b^2x^2 + 4ab(b^2 - a^2)x + (b^2 - a^2)^2 \\ &= (x^2 + 1)\{f(x) + 4a^2b^2\} + 4ab(b^2 - a^2)x + (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2\end{aligned}$$

整式 $(ax + b)^4$ を $x^2 + 1$ で割った余りが -1 なので、
 $ab(b^2 - a^2) = 0$ かつ $(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 = -1$ です。

$ab = 0$ のとき $(b^2 - a^2)^2 = -1$ なので条件を満たす a, b はありません。

$b^2 - a^2 = 0$ のとき $4a^2b^2 = 1$ なので $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ です。

以上より $(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (復号任意) です。